5. Théorèmes de convergence

Exercice 1. À l'aide des théorèmes de convergence, déterminer les limites des suites de termes généraux :

$$(i)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+nk+1},\quad (ii)\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k^2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n,\quad (iii)\quad \int_0^1 \frac{1+nx^3}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x,$$

$$(iv)\quad \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x,\quad (v)\quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{1+x^n}\,\mathrm{d}x,\quad (vi)\quad n\int_0^1 \frac{e^{-nt}}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2 (Interversion série intégrale)**.**

(i) Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{xe^{-ax}}{1-e^{-bx}}$. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+nb)^2}.$$

(ii) Montrer que la somme de la série $\sum ne^{-nx}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et calculer son intégrale.

(iii) Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $x \mapsto e^{x^2}$ soit μ-intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\quad \int_{\mathbb{R}} e^{zx}\,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\int_{\mathbb{R}} x^n\,\mathrm{d}\mu(x).$$

(iv) Montrer que $x \mapsto \frac{\sin x}{e^x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et calculer son intégrale.

Exercice 3. Soient $\alpha > 0$ et μ la mesure de densité $f_\alpha : x \mapsto \alpha e^{-\alpha x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que μ est une mesure de probabilité et que la mesure image ν de μ par $x \mapsto \lfloor x \rfloor + 1$ est une mesure géométrique de paramètre p à déterminer, i.e. :

$$\nu = \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p\,\delta_k.$$

Exercice 4. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue-intégrable, admettant une limite $f(1^-)$ à gauche en 1. L'objectif est de montrer l'équivalent suivant :

$$I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{f(1^-)}{n}.$$

(i) Montrer que la suite (I_n) est bien de limite nulle.

(ii) Montrer le résultat pour $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. En déduire que l'on ne peut pas appliquer le théorème de convergence dominée directement à nI_n.

(iii) Montrer l'équivalent souhaité.

Exercice 5 (Partie finie de Hadamard)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit intégrable sur $]0, 1[$. Montrer que la limite suivante existe :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x + f(0)\ln\varepsilon.$$

Exercice 6 (Fonction Gamma d'Euler)**.** Pour tout $t > 0$, on pose :

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que Γ définit une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et montrer la formule d'Euler :

$$\forall t > 0,\ \Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^t n!}{t(t+1)\dots(t+n)}.$$

Exercice 7. Considérons les fonctions $f : (x,t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$ et $F : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,\mathrm{d}x$. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'exprimer à l'aide de fonction élémentaires.
Peut-on en déduire que la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$?

Exercice 8. En étudiant sa dérivée, déterminer une expression plus simple de la fonction suivante :

$$t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x} e^{-tx}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 9 (Transformée de Fourier)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable (i.e. $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$). On définit la transformée de Fourier de f par :

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x.$$

(i) Montrer que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ définit une application linéaire continue.

(ii) Pour $a \in \mathbb{R}$, notons $\tau_a : f \mapsto f(\cdot - a)$. Montrer que $\mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-ia\xi}\mathcal{F}f(\xi)$.

(iii) Montrer le lemme de Riemann-Lebesgue : $\mathcal{F}f(\xi) \xrightarrow[|\xi|\to+\infty]{} 0$.
En déduire que $\mathcal{F}f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

(iv) Soient $f,g \in L^1(\mathbb{R})$ et $h = f * g$. Montrer que $\mathcal{F}h = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g)$.